實驗誤差之發生及其處理方法探討

何　鶴　壽

㈠ 前　　言

用任何精密的方法與工具，測量一物理量的眞值是不可能的事。因此，觀測值與眞值之間，一定發生差異，此差異叫做誤差 (Errors)。眞值既無法測定，誤差即無法正確，更談不到其大小了！為了這種理由，我們對物理量的測量必作很多次的觀測，而每一次的觀測也不可能得到同樣的數值。我們如何從這許多測量值中決定最理想的數值以代替眞值，更從此求得誤差的最小，即是本文討論的目的。

作物理量的測量時，由於各觀測者的感覺器官不盡完善及個人偏好與特殊方法；所用儀器在構造上有某些缺陷和限制的存在，兼以實驗時外界環境的突然改變，均可影響觀測結果的不正確，換言之，卽為誤差的來源，因此在實驗操作中，如何探求誤差發生的原因，從而根據理論修正我們使用的方法及儀器。

㈡ 誤差分類及其發生的原因

誤差的產生有些可以設法避免或消除；有些可作事先或實驗後的校正。也有非人力所能控制，有的恆趨於過高，有的恆趨於過低，有的則過高與過低並無一定。因此按其大小而有正誤差及負誤差的分別。若按性質則有系統誤差 (Systematic errors) 與雜誤差 (Radom errors)。後者有時也叫做實驗誤差或偶然誤差 (Experimental or Accidental errors)。因此種誤差不易處理，且影響至為重要，本文討論多偏於此一部份。

系統誤差包含 (1) 儀器或工具方面：觀測所用儀器或工具若不理想均屬此類，設停錶太快測得時間必增加，反之停錶太慢，測得時間必較短，同一工具所測結果均有同樣增加或減少，這叫儀器誤差，可與標準儀器校正而免除。(2) 個人方面：設觀測者看見光開動停錶的反應快，及聞聲音將錶停止則反應較慢，無疑將增加看見光至聞及聲音所經之時間。若由數人同時觀測或由訓練有素的觀測者為之，此誤差將特別減少。如觀測者測量一垂直物體，當尺在下端與物體相齊時，可水平讀取刻度，及至上端則需仰視讀取，致上端讀數即生視差，若能在上端讀取時亦保持水平，誤差即不會發生。(3) 外部誤差，通常發生於實驗環境的突然改變，使觀測者無法控制，致誤差由此而產生，但可作必需之改正。賽跑本應在無風時進行，若不得已引用有風情況下的結果，應將風速的影響除去。

雜亂誤差：若觀測者確定系統誤差已全部免除，但多次觀測值仍大小不一，當不是再從系統誤差所產生，但有理由相信是由許多因數所湊成，而這些因數是未知而且變更的，假定此現象乃是一種機遇問題，故大小誤差的發生與出現機會應遵守某些法則。

由於觀測者所用工具受到限制，致刻度不能無限的精細，而所測量的物體無法與刻度完全一致，必在刻度之後猜測其數值。此猜測自不能絕對正確，多次實驗更無理由每次猜測一定相同，此即過大過小的誤差將無法事先預定，大部由於判斷錯誤所致。雜亂誤差對某一次觀測值自不遵守任何規則，惟其出現純屬機遇問題，更考慮許多次之觀測，則由統計學的理論，亦應受其支配。

(三) 雜亂誤差的特性

系統誤差的每一次觀測結果其趨於過大抑趨於過小，常依一定的規則。但雜亂誤差並不如此，不過如觀測次數增加以至無窮大，且每次條件均相同，分析其所有結果，也可發現此一群觀測值可遵從一些規則，設測量物體長度一百次，每次結果必有多少差別，有些較大有些較小，也可能有些相同，若取其平均值，自比單獨一次爲理想。若問再測一次（第 101 次）結果是多少？沒有人能事先知道，若說其結果較接近於平均值則是十分正確的。經驗告訴我們雜亂誤差符合下述特性：(1) 正誤差及負誤差出現的機會相等，(2) 較小的誤差出現機會大，較大的誤差出現機會小，(3) 特別大的誤差出現機會極微。如以 x 軸代表誤差的大小，y 軸代表誤差出現的機會，原點表示誤差爲零，將所有觀測值在 xy 平面作一曲線從上述特性知曲線以 y 軸爲對稱軸，極大值（平均值）出現在誤差爲零的 y 軸上，曲線離開原點逐漸下降，愈遠愈趨近 x 軸。

(四) 誤差曲線的推證

設有一群觀測值爲 $x_1, x_2, \cdots x_n$，n 爲觀測次數，$\bar{x}$ 爲平均值，每次觀測值的誤差爲

$$\varepsilon_1=x_1-\bar{x},\ \varepsilon_2=x_2-\bar{x},\ \cdots,\varepsilon_n=x_n-\bar{x} \cdots\cdots (1)$$

設各次誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\varepsilon_n$ 之機率 (probability) 爲 $\phi(\varepsilon_1)$，$\phi(\varepsilon_2)$，$\cdots\phi(\varepsilon_n)$。照機率的規定 n 個誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$ 同時出現的機率爲各個誤差機率的乘積，以 W 代表總機率則

$$W=\phi(\varepsilon_1)\,\phi(\varepsilon_2)\cdots\phi(\varepsilon_n) \cdots\cdots (2)$$

因爲 $\bar{x}$ 爲平均值（趨近眞值），這群誤差同時出現的機率爲極大 (Maximum)。將(2)式取自然對數的形式，並對 $\bar{x}$ 微分令其結果等於零以符合極大的必需條件 (Necessary condition) 得

$$\frac{d\ln W}{d\bar{x}}=\frac{d\ln\phi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{d\bar{x}}+\frac{d\ln\phi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}\frac{d\varepsilon_2}{d\bar{x}}+\cdots+\frac{d\ln\phi(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n}\frac{d\varepsilon_n}{d\bar{x}}=0\cdots (3)$$

(1) 式對 $\bar{x}$ 微分得 $\frac{d\varepsilon_1}{d\bar{x}}=\frac{d\varepsilon_2}{d\bar{x}}=\cdots=\frac{d\varepsilon_n}{d\bar{x}}=-1$，故 (3) 式可寫成

$$\frac{d\ln\phi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1}+\frac{d\ln\phi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}+\cdots+\frac{d\ln\phi(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n}=0 \cdots\cdots (4)$$

或

$$\frac{d\ln\phi(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1\,d\,\varepsilon_1}\varepsilon_1+\frac{d\ln\phi(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2\,d\,\varepsilon_2}\varepsilon_2+\cdots+\frac{d\ln\phi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n\,d\,\varepsilon_n}\varepsilon_n=0 \cdots\cdots (5)$$

因平均值　$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$　$\therefore\ n\bar{x}=x_1+x_2+\cdots+x_n \cdots\cdots (6)$

(1) 式各項相加 $\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n=(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})$

$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n)-n\bar{x}=0$$

$$\therefore\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=0 \cdots\cdots (7)$$

(5) 式與 (7) 式均爲代表誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 間的關係方程式，比較兩式，可知同一誤差的係數必成比例則

$$\frac{d\ln\phi(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1\,d\,\varepsilon_1}=\frac{d\ln\phi(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2\,d\,\varepsilon_2}=\cdots=\frac{d\ln\phi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n\,d\,\varepsilon_n}=c \cdots\cdots (8)$$

普遍式爲 $\dfrac{d\ln\phi(\varepsilon)}{\varepsilon\,d\,\varepsilon}=c$ 即 $d\ln\phi(\varepsilon)=c\varepsilon d\varepsilon \cdots\cdots (9)$

將 (9) 式積分得 $\ln\phi(\varepsilon)=\dfrac{1}{2}c\varepsilon^2+c'$ 　c' 爲積分常數，取消對數得

$$\phi(\varepsilon)=e^{\frac{1}{2}c\varepsilon^2}\cdot e^{c'} \quad 令\ e^{c'}=A$$

$$\therefore\ \phi(\varepsilon)=Ae^{\frac{1}{2}c\varepsilon^2} \cdots\cdots (10)$$

令 $\phi(\varepsilon)=y$，$\varepsilon^2=x^2$ 則 (10) 式可寫成

$$y=A^{\frac{1}{2}cx^2}. \cdots\cdots (11)$$

從上節雜亂誤差的特性知當 x 值增加則 y 值變小，或小誤差出現機會大，大誤差出現機會小均可推斷常數 c 必爲負值，令 $\dfrac{c}{2}=-h^2$ 代入 (11) 式得

$$y=Ae^{-h^2x^2} \cdots\cdots (12)$$

式中 y 代表誤差出現機率，x 代表誤差的大小，A，h 爲待定的兩個常數。(12) 式叫做誤差曲線方程式，或者叫高斯正則誤差定律 (Gauss or "normal" error law)。

下面推證常數 $A=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}$，　$\therefore\ \phi(\varepsilon)=Ae^{-h^2\varepsilon^2} \cdots\cdots (13)$

我們討論 n 次觀測值中，必盡可能包含所有的誤差故

$$n=n\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\varepsilon)d\varepsilon \quad 即\ 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\varepsilon)d\varepsilon$$

以 $d\varepsilon$ 乘 (13) 式得 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\varepsilon)d\varepsilon=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=1 \cdots\cdots (14)$

令 $t=h\varepsilon$，$dt=hd\varepsilon$，$-t^2=-h^2\varepsilon^2$

$$\therefore\ \int_{-\infty}^{+\infty}A\frac{h}{h}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{A}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=1 \cdots\cdots (15)$$

由積分表知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ 代入 (15) 式得

$\dfrac{A}{h}\sqrt{\pi}=1$ 　$\therefore\ A=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}$，(12) 式可寫爲

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}. \cdots\cdots (16)$$

再討論誤差曲線的特性如下:

(1) 以 $\pm x$ 代入 (16) 式其值不變，y 爲 x 的偶函數，Oy 爲曲線的對稱軸，此即表示正負誤差出現會相等。

(2) $x=0$，$y=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}$ 爲極大值，x 增加，曲線逐漸下降可表示較小誤差出現機會較大。$x=\pm\infty$，$y=0$ 特別大的誤差出現機會非常小。

(3) $\frac{dy}{dx}=-2\frac{h^3}{\sqrt{\pi}}xe^{-h^2x^2}$，當 $x=0$，$\frac{dy}{dx}=0$，曲線最高點的切線與 x 軸平行。當 $x\pm\infty$，$\frac{dy}{dx}=0$，x 軸爲此曲線的漸近線 (asymptote)。

(4) $\frac{d^2y}{dx^2}=-2\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)h^2e^{-h^2x^2}(1-2h^2x^2)$，當 $(1-2h^2x^2)=0$ 時，

$\frac{d^2y}{dx^2}=0$，$\therefore\ x=\pm\frac{1}{h\sqrt{2}}$ 此曲線有兩反轉點 (point of inflection)。

從 (16) 式知 $y\,\alpha\,h$，h 大時曲線高而狹，表示觀測高度精確，h 小時曲線低而寬，h 叫做精度 (precision index)。從 (14) 式知任何曲線所包含之面積必相同，曲線高而狹及低而寬爲必然結果。

㈤ 差誤的表示

(1) 以 a 表示平均偏差 (Average deviation)。

偏差之和爲零，但絕對値之和不爲零，取其平均偏差

得 $$a=\frac{\sum_{n=1}^{n}|\varepsilon|}{n}. \qquad \cdots\cdots(17)$$

因爲 n 爲觀測次數，將 (13) 式兩邊乘以 $nd\varepsilon$ 及 $\frac{|\varepsilon|}{n}$ 得

$$|\varepsilon|\phi(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{h}{\sqrt{\pi}}|\varepsilon|e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon \text{ 積分得}$$

$$a=\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon|\phi(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon|e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon$$

$$=-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}(-2h^1\varepsilon d\varepsilon)$$

$$=-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}d(-h^2\varepsilon^2)=-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\ (-1)$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \qquad \cdots\cdots(18)$$

(2) 以 S 表示標準偏差 (Standard deviation)。

依定義 $S=\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n}\varepsilon^2}{n-1}}$　$n\to\infty$，$n-1\doteqdot n$

$$\therefore\ S^2=\frac{\sum_{n=1}^{n}\varepsilon^2}{n} \qquad \cdots\cdots(19)$$

將 (13) 式兩邊乘以 $nd\varepsilon$ 及 $\frac{\varepsilon^2}{n}$ 並積分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2\phi(\varepsilon)d\varepsilon=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{\sqrt{\pi}}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=S^2 \qquad \cdots\cdots(20)$$

從 (14) 式得 $\frac{\sqrt{\pi}}{h}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon$ 兩邊對 h 微分

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{h^2}dh=-2h\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon dh$$

化簡得　$\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{\sqrt{\pi}}{h^3 2}$代入(20)式

$$S^2=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}=\frac{1}{2h^2}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{h\sqrt{2}}\quad\cdots\cdots\cdots(21)$$

標準偏差恰與誤差曲線反轉點同值。

(3) 以P表示可機誤差 (Probable error)

依定義它的可機率爲 $W_{P,P}=\frac{1}{2}$，即是說觀測值的誤差大於此極限的是一半，小於此極限的也是一半。

$$W_{-P,P}\int_{-P}^{P}\phi(\varepsilon)d\varepsilon=2\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{o}^{P}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots\cdots(22)$$

令 $t=h\varepsilon$, $dt=hd\varepsilon$, $-t^2=-h^2\varepsilon^2$，增大積分極限 h 倍得

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{o}^{Ph}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots\cdots(23)$$

由代數學知　$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$以$-t^2$ 代替 x 得

$e^{-t^2}=1-\frac{t^2}{1}+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}+\cdots\cdots$兩邊乘以 dt 幷積分得

$\int_{o}^{Ph}e^{-t^2}dt=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{10}-\frac{t^7}{42}+\frac{t^9}{216}+\cdots\cdots$代入(23)式得

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{o}^{Ph}e^{-t}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[(Ph)-\frac{(Ph)^3}{3}+\frac{(Ph)^5}{10}-\frac{(Ph)^7}{42}+\frac{(Ph)^9}{216}-\cdots\cdots\right]=\frac{1}{2}$$

令 $\rho=Ph$ 故上式爲 $\rho-\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^5}{10}-\frac{\rho^7}{42}+\frac{\rho^9}{216}+\cdots\cdots=\frac{\sqrt{\pi}}{4}=0.4431$

若取首一項 $\rho=0.4431=\triangle$

若取首二項　$\rho-\frac{\rho^3}{3}=\triangle$，$\rho=\triangle+\frac{\triangle^3}{3}$，$\rho^3=\left(\triangle+\frac{\triangle^3}{3}\right)^3$展開忽畧高

次項得　$\rho^3=\triangle^3+\triangle^5+\cdots\cdots$，$\rho^5=\triangle^5+\cdots\cdots$

若取首三項　$\rho-\frac{1}{3}(\triangle^3+\triangle^5)+\frac{1}{10}\triangle^5=\triangle$，　$\therefore\quad\rho=\triangle+\frac{1}{3}\triangle^3+\frac{7}{30}\triangle^5+\cdots\cdots$

如此繼續推演可得　$\rho=\triangle+\frac{1}{3}\triangle^3+\frac{7}{30}\triangle^5+\frac{127}{630}\triangle^7\cdots\cdots$

$$\rho=0.4769=Ph$$

$$\therefore\quad P=\frac{0.4769}{h}\quad\cdots\cdots\cdots(24)$$

從(24)式及(18)式有 $P=\frac{0.4769}{h}=\frac{0.4769}{\frac{1}{a\sqrt{\pi}}}=0.8453a=0.8453\frac{\sum_{n=1}^{n}|\varepsilon|}{n}\quad\cdots\cdots\cdots(25)$

從(24)式及(21)式有 $P=\frac{0.4769}{h}=\frac{0.4769}{\frac{1}{S\sqrt{2}}}=0.6745S=0.6745\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n}\varepsilon^2}{n-1}}\cdots\cdots\cdots(26)$

從(25)式及(26)式得 $P=0.8453a=0.6745S$ 或 $P<a<S$,

我們以精度 h 與各別的關係把 p,a,S 聯成上式。可機誤差 P 在三者之中爲最小，它的特點是以 $\pm P$ 爲極限，大於此極限與小於此極限，其出現的機會各佔50%。平均偏差的值介於可機誤差與標準偏差之間，在理論上沒有其他二種精密但在計算上則簡單甚多。標準偏差雖然其值稍大，但以 $\sum_{n=1}^{n}\varepsilon^2$ 表示，最符合機率極大的原理。從(25)及(26)兩式均可看出觀測次數增加則 P,a,S，均將變小，正是尋求誤差小值的惟一方法。在(26)式中，如 $\sum_{n=1}^{n}\varepsilon^2$ 爲最小，直接影響 S 變爲小值，同時 P 亦跟著變小。在(21)中 $S=\frac{1}{h\sqrt{2}}$，如 S 變小則 h 必大，增加精度也是我們要求的另一結果。在(18)式中 $a=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}$，當 h 大時則 a 值變小。我們可用任何一種誤差來比較各不同觀測組的相對精度，不過要注意那些不同觀測組，須在同一條件下的觀測結果，而受同一系統誤差的影響。

我們也可用 P,a,S，任一種誤差以表觀測值與眞值間的差異，或表示結果的精確程度，如 $x=\bar{x}\pm P$, $x=\bar{x}\pm a$, $x=\bar{x}\pm S$ 均爲誤差之表示方法。在 P,a,S 任何誤差爲小值時均可表示觀測愈精確。

當 $\sum_{n=1}^{n}\varepsilon^2$ 符合機率極大時則其總和應爲最小，其理由如下，爲了簡單我們考慮同精度情形。從 (2) 式知 $W=\phi(\varepsilon_1)\phi(\varepsilon_2)\phi\cdots\phi(\varepsilon_n)=$極大，又從 (13) 式 $\phi(\varepsilon)=Ae^{-h^2\varepsilon^2}$,

$\therefore W=(Ae^{-h^2\varepsilon_1^2})(A^{\varepsilon}e^{-h}\varepsilon^2_2)\cdots(Ae^{-h}\varepsilon_n{}^2)=$極大

$$W=nAe^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2)}=\text{極大},$$

要上式爲極大，因 nA,h^2 均爲常數而 h^2 前面爲負號，則必$(\varepsilon_1{}^{2+}\varepsilon_2{}^{2+\cdots+}\varepsilon_n{}^2)=$極小。即偏差自乘之和爲極小時可機率爲極大。此亦爲最小二乘法名稱的來源。

(六) 誤差的傳播

物理量的測量及誤差的表示，前已述及。玆有 x,y 兩組觀測值，分爲 $A=(\bar{x}\pm0.02)cm$, $B=(\bar{y}\pm0.03)cm$。求 $A+B=(\bar{x}+\bar{y})\pm$?，此屬誤差傳播問題，因爲 x,y 兩組觀測值中本身已有誤差，相加結果必有誤差存在，當無疑問，但其數值是否純爲誤差之和抑另有結果，有進一步討論的必要。

玆以每一對觀測值討論如下：設

$V_1=V(x_1,y_1),V_2=V(x_2,y_2),\cdots V_n=V(x_n,y_n)$. x,y 之平均值爲 $\bar{x},\bar{y}$。則 $\overline{V}=V(\bar{x},\bar{y})$。每一 $\overline{V}_n$ 與 V 之差爲 $\delta V_n=V_n-V(\bar{x},\bar{y})$，即 $\delta V_n=V_n-\overline{V}$ 由微分知

$$\delta V_n=\frac{\partial V}{\partial x}\delta V_n+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y_n \cdots\cdots (27)$$

$\therefore$ $\delta x_n=x_n-\bar{x}$, $\delta y_n=y_n-\bar{y}$ 及 $\frac{\sum_{n=1}^{n}\delta x_n}{n}=0$, $\frac{\sum_{n=1}^{n}\delta y_n}{n}=0$, 同理平均值 $V_n=\frac{\sum_{n=1}^{n}\delta V_n}{n}=0$

$\therefore$ $\delta V_n=V_n-V(\bar{x},\bar{y})=0$

$$\therefore\quad V_n=V(\bar{x},\bar{y})=V \cdots\cdots (28)$$

將 (27) 式平方，各項相加再平均得

$$\frac{\sum_{n=1}^{n}\delta V_n{}^2}{n}=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\sum_{n=1}^{n}\delta x_n{}^2}{n}+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\frac{\sum_{n=1}^{n}\delta y_n{}^2}{n}+2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\sum_{n=1}^{n}(\delta x_n,\delta y_n)}{n}$$

如 $n\to\infty$，$n-1\doteqdot n$，則上式兩邊開方後，左邊項適爲 V 之標準偏差，以 S_v 表之，右邊第一，二兩項右邊部份分別爲 $S_x{}^2=\frac{\sum_{n=1}^{n}\delta x_n{}^2}{n}$，及 $S_y{}^2=\frac{\sum_{n=1}^{n}\delta y_n{}^2}{n}$。第三項在獨立觀測的條件下爲零。故簡寫爲

$$S_v=\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2S_x{}^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2S_y{}^2}.\cdots\cdots(29)$$

應該注意的是如有第三組的觀測值，可在方根號內增加一項 $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2S_z{}^2$，再多可類推。(29) 式是以標準偏差表示，惟欲以平均偏差或可機誤差表示亦可，但不能在同一方程包含不同形式的偏差。同時應考慮 P（或 a）與 S 的關係。

(29) 式適用於特殊的條件：仍考慮兩個變數，

(1) 和與差的情形，設 $V=x\pm y$，則 $\frac{\partial V}{\partial x}=1$，$\frac{\partial V}{\partial y}=\pm1$，代入 (29) 式

$$S_v=\sqrt{(1)^2S_x{}^2+(\pm1)^2S_y{}^2}=\sqrt{S_x{}^2+S_y{}^2}\cdots\cdots(30)$$

換言之和與差的絕對標準偏差爲各絕對標準偏差平方和的開方，如上舉例則
$A+B=(\bar{x}+\bar{y})\pm\sqrt{(0.02)^2+(0.03)^2}$.

(2) $V=x^my^n$ 的情形，$\frac{\partial V}{\partial x}=mx^{m-1}y^n$；$\frac{\partial V}{\partial y}=ny^{n-1}x^m$，代入 (29) 式得

$$S_v=\sqrt{(mx^{m-1}y^n)^2S_x{}^2+(ny^{n-1}x^m)^2}=\sqrt{m^2x^{2(m-1)}y^{2n}S_x{}^2+n^2y^{2(n-1)}x^{2m}S_y{}^2},$$

兩邊以 $V=x^my^n$ 除之得 $\frac{S_v}{V}=\sqrt{m^2\left(\frac{S_x}{x}\right)^2+n^2\left(\frac{S_y}{y}\right)^2}$,

令 $S_v=\frac{S_v}{V}$，$S_x=\frac{S_x}{x}$，$S_y=\frac{S_y}{y}$，分別表示 V,x,y 的部份標準偏差 (Fractional standard deviation)，則上式可寫爲

$$S_v=\sqrt{m^2S_x{}^2+n^2S_y{}^2}\cdots\cdots(31)$$

式中 m,n 分別爲 x 及 y 的指數。

(3) $V=xy$ 或 $V=\frac{x}{y}$ 的情形，即簡單的乘除。由 (2) 項結果知 $m=1$，$n=\pm1$，代入 (31) 式得

$$S_v=\sqrt{(1)^2S_x{}^2+(\pm1)^2S_y{}^2}=\sqrt{S_x{}^2+S_y{}^2}\cdots\cdots(32)$$

(30) 式與 (32) 式，形式雖同，但意義各異，因 (30) 式只表示絕對標準偏差而 (32) 式則表示部份標準偏差。

設圓柱體密度爲 ρ，依定義 $\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\pi r^2h}$ 如 M（質量），r（半徑），h（高度）之部份標準偏差爲 2%，3%，5% 擬求 ρ 之部份標準偏差可用 (31) 式得

$$S_\rho=\sqrt{(1)^2\left(\frac{2}{100}\right)^2+(-2)^2\left(\frac{3}{100}\right)^2+(-1)^2\left(\frac{5}{100}\right)^2}=\sqrt{\frac{65}{1000}}=8\%$$

由此可知 r 之誤差原比 h 之誤差爲小，但對結果之影響，則由於 r 者更大於 h，即方程式中

指數愈高的量，影響愈大，觀測時應特別注意。

標準偏差乃從一組 n 次觀測值中求其偏差平方總和的平均值的開方。即 $S=\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n}\varepsilon^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n}\varepsilon^2}{n}}$，今欲從 n 組觀測值中分別求得各組的標準偏差，再求標準偏差的平均，則其偏差當更小，不過這是極麻煩的工作。但很幸運我們擬求的標準偏差平均值，可毋需重複的 n 組觀測工作，而用 (29) 式推求即得，設 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 分別對 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 微分得 $\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_1}=\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}=\cdots=\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_n}=\frac{1}{n}$，以 V 代替 $\bar{x}$ 則

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2=\cdots=\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2=\frac{1}{n^2}，\text{代入 (29) 式得}$$

$$S_{\bar{x}}=\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 S_{x_1}{}^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)S_{x_2}{}^2+\cdots}=\sqrt{\frac{1}{n^2}(S_{x_1}{}^2+S_{x_2}{}^2+\cdots)}$$

$$=\sqrt{\frac{S_{x_1}{}^2+S_{x_2}{}^2+\cdots+S_{x_n}{}^2}{n}\,\frac{1}{n}}=\frac{S}{\sqrt{n}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

(33) 式即表示標準偏差的平均值，是由 n 次觀測所得的標準偏差再除以觀測次數的開方，如觀測次數愈多則標準偏差的平均將愈小，亦表示觀測值愈精確，此結果即爲統計學的基本原理。

從 (26) 式知 S 表示一次觀測的標準偏差與偏差平方總和以及觀測次數 n 的關係。因此也顯示可機誤差 P 的單一次觀測與觀測次數 n 的關係。如將 S 換以標準偏差的平均值 $S_{\bar{x}}$，則 (26) 式可寫爲 $\mathrm{P,E}=0.6745\frac{S}{\sqrt{n}}=0.6745\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n}\varepsilon^2}{n(n-1)}}$ ⋯⋯⋯⋯(34)

很明顯 (34) 式乃表示 n 次觀測平均值的可機誤差。比較 (34) 及 (26) 式得 $\mathrm{P,E,}=P\frac{1}{\sqrt{n}}$，從此式可知 25 次觀測平均值的可機誤差，其精確程度是五倍於單一次觀測的可機誤差。或者說觀測 25 次，其單一次觀測的可機誤差的五分之一等於 25 次觀測平均值的可機誤差。

(七) 誤差曲線的幾何意義

從 (14) 式 $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=1$

曲線與 ε 軸間所包含之面積代表所有誤差可機率的總和而應爲 1 (Unity)，故無論 h 爲何值曲線與 ε 軸間之面積恆相等。以標準偏差討論之：

$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$； $\therefore\ y\alpha h$，$h=\frac{1}{s\sqrt{2}}$。標準偏差 s 愈小，則精度 h 愈大而曲線愈趨近 OY 軸，反之標準偏差大精度小曲線離 OY 軸而下降。

至於可機誤差的幾何意義更爲明顯從 (23) 式

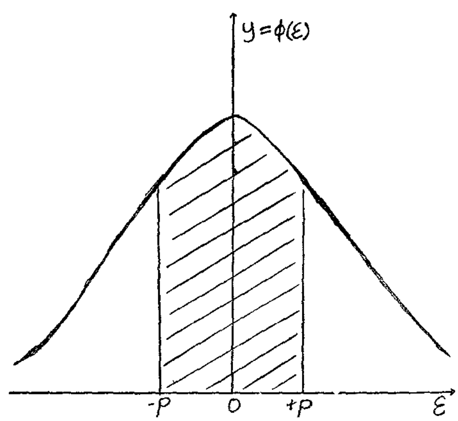


圖 一

$$W_{-p,p}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ph} e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}$$

通過 $\pm P$ 縱線與誤差曲線相交，分割總面積為三部份，中間斜線部份面積等於其餘二部份面積之和如圖一、

(八) 權 (Weights) 的性質

從觀測值以決定各種誤差，均假定有同等的精度。若觀測者有各種不同的精度，則應給予各種不同的權。精於實驗的人所作觀測值，毫無疑問比初次實驗的學生所測結果為可靠。同為精於實驗的人多次觀測比少次觀測要準確，因此不同精度的觀測是不能按照從前方法求其平均值。對於觀測精度較高的結果，必予較大的信賴，此表示對於某次觀測值信賴的程度叫做權。

以觀測次數多少來決定誤差的大小，係指同一觀測者使用同樣儀器而言。推廣之觀測者經驗不同，儀器精粗不一，自不能只計觀測次數，購物常以輕重論值，然亦應注意質的精細，此乃人情之常。故觀測權當注意經驗，儀器，次數等包含在內。

設 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 為觀測值，各次觀測值的權係數 (weight factor) 為 w_1，$w_2\cdots w_n$，則 w_1x_1，w_2x_2，$\cdots w_nx_n$ 叫做權觀測。同權觀測由於 $w_1=w_2=\cdots=w_n$ 經證明偏差平方和為極小，即

$$(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2=\text{極小}，\text{微分化簡得}$$

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}，\text{為同權之平均值。}$$

不同權的觀測，權偏差平方和為極小，同權觀測，具同樣精度，得 $(h^2\varepsilon_1^2+h^2\varepsilon_2^2+\cdots+h^2\varepsilon_n^2)=$極小，不同權觀測則因精度不同，設分別為 h_1，h_2，$h_3,\cdots h_n$ 則上式應改為

$$(h_1^2\varepsilon_1^2+h_2^2\varepsilon_2^2+\cdots+h_n^2\varepsilon_n^2)=\text{極小}\cdots\cdots\cdots(35)$$

設 h 為標準精度令 $\frac{h_1^2}{h^2}=w_1$，$\frac{h_2^2}{h^2}=w_2$，$\cdots\frac{h_n^2}{h^2}=w_n$，

$\therefore$ $h_1^2=w_1h^2$，$h_2^2=w_2h^2$，$\cdots h_n^2=w_nh^2$，代入 (35) 式得

$$h^2(w_1\varepsilon_1^2+w_2\varepsilon_2^2+\cdots+w_n\varepsilon_n^2)=\text{極小}，$$

$$w_1(x_1-\bar{x})^2+w_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+w_n(x_n-\bar{x})=\text{極小}，\text{微分化簡得}$$

$$\bar{x}=\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}\cdots\cdots\cdots(36)$$

設只有兩組觀測值則簡寫為 $\bar{x}=\frac{w_1x_1+w_2x_2}{w_1+w_2}$ $\cdots\cdots\cdots(37)$

此是用兩種方法測得 x 之值為 x_1 及 x_2，其標準偏差為 S_1 及 S_2，權係數為 w_1 及 w_2，則 (37) 式為不同權的平均值。

$\bar{x}=\frac{w_1x_1+w_2x_2}{w_1+w_2}=\frac{x_1+wx_2}{1+w}$，其中 $w=\frac{w_2}{w_1}$，如以 v 代 $\bar{x}$，x_1 相當於 x，x_2 相當於 y，

則 $\frac{\partial v}{\partial x_1}=\frac{1}{1+w}$，$\frac{\partial v}{\partial x_2}=\frac{w}{1+w}$，代入 (33) 式得

$$S_{\bar{x}}=\sqrt{\left(\frac{1}{1+w}\right)^2S_1^2+\left(\frac{w}{1+w}\right)^2S_2^2}=\frac{1}{1+w}(s_1^2+w^2s_2^2)^{\frac{1}{2}}，\text{取自然對數式得}$$

$\ln S_{\bar{x}}=\frac{1}{2}\ln(s_1^2+ws_2^2)-\ln(1+w)$，對$w$微分並令等於

零，$\frac{1}{S_{\bar{x}}}\frac{d}{dw}S_{\bar{x}}=\frac{1}{2(s_1^2+ws_2^2)}\frac{d}{dw}(s_1^2+w_2s_2^2)-\frac{1}{1+w}\frac{d}{du}(1+w)=0$，化簡得

$$ws_2^2-s_1^2=0,\qquad \therefore\ w=\frac{w_2}{w_1}=\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 \quad\cdots\cdots(38)$$

權係數與標準偏差平方成反比例。

$\frac{w_2}{w_1}=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{\left(\frac{1}{h_1\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\frac{1}{h_2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{h_2^2}{h_1^2}$，權係數與精度平方成正比例。

$P_1=\frac{0.4769}{h_1}$，$P_2=\frac{0.4769}{h_2}$，$\frac{p_1}{p_2}=\frac{h_2}{h_1}$，可機誤差與精度成反比例、$\therefore\ \frac{w_2}{w_1}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$。從上諸式可得下列結論 (1) 權係數 ($w$) 愈大則可機誤差 ($p$) 愈小，(2) 精度 ($h$) 愈高則權愈大，(3) 權係數愈大則標準偏差 (s) 愈小，均可使觀測值愈精確。或者說誤差愈小。

(九) 實例討論

甲乙二人相距d米，作時間的觀測，甲放槍以作信號，乙於甲放槍見火光時即開動停錶至聞槍聲而停止，共作26次觀測其結果如表一：

平均值 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{40.05}{26}=1.540$秒。

平均偏差 $a=\frac{\sum_n^{n=1}|\varepsilon|}{n}=\frac{1.120+1.130}{26}=0.0865$秒。

可機誤差 $p=0.6745\sqrt{\frac{3101\times10^{-4}}{26-1}}=0.074$ 秒。

平均可機誤差 $P.E.=0.6745\sqrt{\frac{310\times10^{-4}}{26\times25}}=0.015$ 秒。

標準偏差 $S=\sqrt{\frac{3101\times10^{-4}}{26-1}}=0.11$ 秒。

$P.E.=\frac{P}{\sqrt{n}}$ 代入上述結果 $\therefore\ 0.015=\frac{0.074}{\sqrt{26}}$，

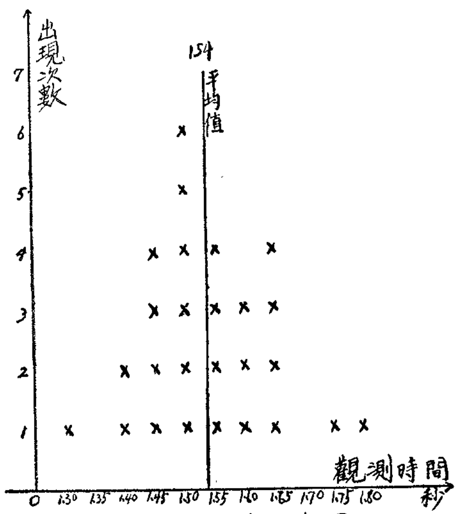
$\frac{s}{a}=\frac{\frac{1}{h\sqrt{2}}}{\frac{1}{h\sqrt{\pi}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}=1.25$，但實驗結果 $\frac{s}{a}=\frac{0.110}{0865}=1.27$。

以觀測結果作統計如表二，

作觀測值分佈圖二， 水平軸代表觀測時間，垂直軸代表出現次數，(以×表示一次)，平均值畫一垂直粗線， 數據 *data* 有叢集於平均值之趨向，正負偏差各出現13次，分佈於粗線的兩旁。

表一 觀測結果

觀測次數	時間秒	偏差秒 −	偏差秒 ＋	偏差平方秒²
1	1.50	0.040		16×10^{-4}
2	1.65		0.110	121×10^{-4}
3	1.45	0.090		81×10^{-4}
4	1.50	0.040		16×10^{-4}
5	1.30	0.240		576×10^{-4}
6	1.40	0.140		196×10^{-4}
7	1.60		0.060	36×10^{-4}
8	1.65		0.110	121×10^{-4}
9	1.75		0.210	441×10^{-4}
10	1.55		0.010	1×10^{-4}
11	1.50	0.040		16×10^{-4}
12	1.60		0.060	36×10^{-4}
13	1.50	0.040		16×10^{-4}
14	1.45	0.090		81×10^{-4}
15	1.55		0.010	1×10^{-4}
16	1.40	0.140		196×10^{-4}
17	1.80		0.260	676×10^{-4}
18	1.45	0.090		81×10^{-4}
19	1.55		0.010	1×10^{-4}
20	1.65		0.110	121×10^{-4}
21	1.65		0.110	121×10^{-4}
22	1.50	0.040		16×10^{-4}
23	1.55		0.010	1×10^{-4}
24	1.45	0.090		81×10^{-4}
25	1.60		0.060	36×10^{-4}
26	1.50	0.040		16×10^{-4}
總和	40.05	1.120	1.130	3101×10^{-4}



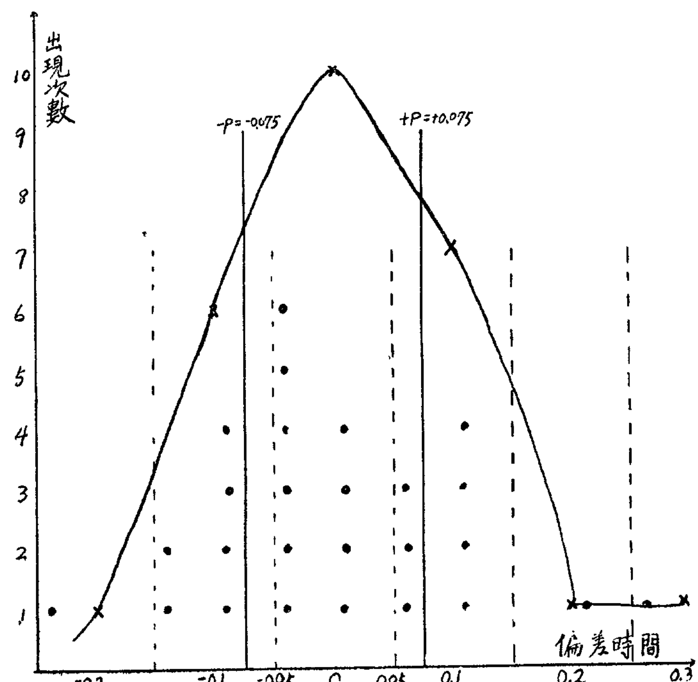
圖二 觀測值分布圖

表二 觀測結果統計

觀測時間	1.30	1.40	1.45	1.50	1.55	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80
出現次數	1	2	4	6	4	3	4	／	1	1
偏	0.24	0.14	0.09	0.04	0.01	0.06	0.11	／	0.21	0.26
差	−←							→+		

0

再以水平軸代表偏差，垂直軸代表出現次數，水平軸中點偏差爲零，也代表平均值。以 0 爲中心向左右延以 0.1 秒（虛線爲界）爲間隔，分成五個垂直部份，以每點代表出現一次，每垂直部份總點數以“×”代表，聯成曲線如圖三。圖中以±0.075（粗線表示）爲極限，在此極限內外均出現13次。即 $x=\bar{x}\pm0.075$ 極限內值從 1.46 至 1.62 秒，實測值爲 1.50 至 1.60 秒共 13 次。此結果符合誤差曲線定律，惟曲線不够光滑，觀測 26 次仍嫌太少。



圖三 誤差曲線分佈圖

上例因聯結點太少，致曲線不够光滑，惟我們討論誤差原假設觀測次數相當多以符合機率規定。兹舉另例討論如下：

設觀測物體長度 51 次結果如表三：第一行爲觀測值，第二行爲出現之次數，第三行爲觀測值乘出現次數，如第三列觀測值爲 1.03 厘米，出現 6 次則觀測總值爲 6.18 厘米。第五行偏差絕對值乘出現次數，第六行爲偏差平方再乘出現次數。

平均值 $\bar{x}=\frac{53.75}{51}=1.054$ 厘米，

平均偏差 $a=\frac{0.86}{51}=0.017$ 厘米，

標準偏差 $S=\sqrt{\frac{0.0234}{51}}=0.022$ 厘米，

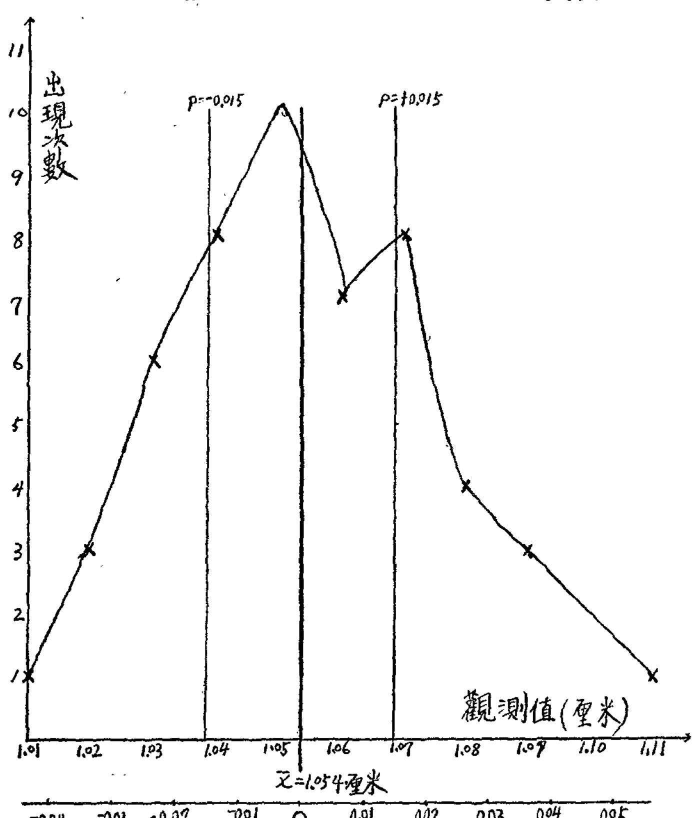
可機誤差 $P=0.6745\times0.022=0.015$ 厘米，

可機誤差平均值 $P.E.=\frac{0.015}{\sqrt{51}}=0.0021$ 厘米，

觀測值爲三位有效數字但觀測值總和爲 53.75 厘米，平均值 1.054 厘米均爲四位有效數字，如此處置比較合理因平均值比單一次觀測值應該更爲精確。不過計算偏差時平均值還是只用三位有效數字，所以偏差只爲一位有效數字，此即影響由偏差而得之平均偏差及標準偏差等不應取過多位有效數字，理論上 $\frac{s}{a}=1.25$ 而本例結果爲 $\frac{s}{a}=\frac{0.022}{0.017}=1.29$ 稍爲大些亦與此

圖表　三

一	二	三	四	五	六
觀測值（厘米）	出現次數	觀測總值	偏　差（厘米）	偏差絕對值	偏差平方總和
1.01	1	1.01	−0.04	0.04	16×10^{-4}
1.02	3	3.06	−0.03	0.09	27×10^{-4}
1.03	6	6.18	−0.02	0.12	24×10^{-4}
1.04	8	8.32	−0.01	0.08	8×10^{-4}
1.05	10	10.50	0.00	0	0
1.06	7	7.42	+0.01	0.07	7×10^{-4}
1.07	8	8.56	+0.02	0.16	32×10^{-4}
1.08	4	4.32	+0.03	0.12	36×10^{-4}
1.09	3	3.27	+0.04	0.12	48×10^{-4}
1.10	0	0	+0.05	0	0
1.11	1	1.11	+0.06	0.06	36×10^{-4}
	51	53.75		0.86	234×10^{-4}



圖四、觀測與出現次數關係圖

有關。

根據表三觀測結果，作觀測值與出現次數的關係如圖四，水平軸代表觀測值，垂直軸代表出現次數，以 0.01 厘米爲間隔，如 1.02 厘米必介於 1.015 至 1.025 之間出現 3 次，即在 xy 平面 (1.02，3) 畫“×”代表，餘類推即可聯成曲線，此曲線左半部比較理想，右半部則變動相當厲害，尤於 1.05 至 1.07 之間，曲線已經下降又上升，又曲線最高與平均值不相重，均爲其缺點，與上列比較因觀測次數增加，聯結點亦增則曲線比較合理。如果我們再觀測51次同樣長度出現的次數可能與前次不同，因之二次觀測所成曲線並不一定相重，但如將間隔再小，觀測數增至 500 次或至5000次，則曲線應可更爲平滑。

以可機誤差爲極限 $x=\bar{x}\pm p$，即 $x=1.054\pm0.015$，觀測值從 1.039 至 1.069 厘米，極限內出現25次與定義符合。

(十) 結論

系統誤差可事先設法免除或在實驗後作必要的校正；雜亂誤差因由於許多不明原因及變動的因數所湊成，討論一次觀測次數增加以至無窮大亦遵守一些規則——服從誤差曲線定律。

同精度的觀測純以次數愈多誤差愈小或觀測愈精確，偏差平方總和爲極小。不同精度的觀測則與權係數有關，權大者精度高，誤差小。觀測次數亦愈多愈佳，同時考慮觀測經驗及使用儀器優劣等其他因數。

誤差常以平均偏差，標準偏差及可機誤差表示，若用標準偏差的平均值，則誤差更小精確度更高。

本文研究蒙學校補助，謹此誌謝！

主要參考資料

(1) precision of measurements and graphical method. by H. M. Goodwing, Mcgraw-Hill.
(2) Introduction to the theory of error. by Yardley Beers. Second edition.
(3) Errors, by V. E. Eaton, M. J. Martin, R. S. Minor 等 Central Scientific Co.,
(4) 測量平差法　陳永齡等著　　商務
(5) 最小二乘法　周卡著　　龍門
(6) 科學教育 (誤差) 六卷九期

本文提要

任何精密的方法與工具均無法測量物理量的眞值。因之測量與眞値間的差異叫做誤差。本文卽討論誤差發生的原因及其處理方法。主要內容爲(1) 誤差分類及其發生的原因，(2) 雜亂誤差的特性，(3) 誤差定律的推證，(4) 誤差的表示方法及其傳播 (5) 權的性質等。結論爲系統誤差可設法免除或校正，雜亂誤差則由於許多不明原因及變動的因數所湊成，只討論一次觀測值殊無一定規則，但觀測次數增加以至無窮無可遵守誤差定律。同精度的觀測以次數愈多誤差愈小；不同精度的觀測則與權有關，權大的精度高誤差小，觀測次數仍以愈多愈好。

A STUDY ON THE OCCURENCE OF EXPERIMENTAL ERRORS AND THEIR DISPOSAL

An Abstract

Ho Hoh Shou

No method or instrument, however precise and accurate, can measure the true value of the quantitities of physical matters. There inevitably exists a discrepance between the true value and the detected value. This discrepance is called experimental error. To the discussion of the occurence of experimental errors and the method of their disposal the present article is devoted. It covers the following main features: (1) the causes and the classification of errors; (2) the characteristics of random errors; (3) the deduction of the law of error; (4) the method of expressing errors and the dissemination of errors; and (5) the quality of weights. In consequence of full discussions it is found that there can be one way or another to eliminate or rectify systematic errors, that random errors are caused by many unknown reasons as well as changeable and uncontrollable factors, that no definite law can be deducted from merely a discussion of a single observation, but with the increase of observations made the law of error would present itself to the observer, that the more the observations each with the same precision are made, the less errors there will be, that there is a relation between weights and observations each made with dissimilar precision—larger weights produce higher precision and smaller errors; and that the accuracy of the detected value of the quantities of physical matters often ensues the frequency of the observations made; more observations brings about better accuracy.